Nouvelle démonstration du théorème de Pythagore

à partir de la loi des sinus

par Ata – ûllah Gourine

Retour Loi des sinus

Soit un triangle ABC , rectangle en A et posons BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$

et posons H $= a^2 - b^2 - c^2$ (1)

Rappelons la loi des sinus et appliquons la au triangle rectangle ABC

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S}$$ S étant l'aire du triangle ABC

$$\text{A}= 90° \Rightarrow \sin A = 1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = k \Rightarrow \begin{cases} a = k \Rightarrow a^2 = k^2 \\ b = k \sin B \Rightarrow b^2 = k^2 \sin^2 B \\ c = k \sin C \Rightarrow c^2 = k^2 \sin^2 C \end{cases}$$

reportons ces valeurs respectives de a^2, b^2, c^2 dans (1)

$$\text{H}= k^2 - k^2 \sin^2 B - k^2 \sin^2 C = k^2(1 - \sin^2 B - \sin^2 C)(2)$$

rappelons la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

obtenue d'un *cas particulier de la formule fondamentale*

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

où l'on pose : $a = b = x$

dans (2) on a :

$$\text{H}= k^2 (\cos^2 B+ \sin^2 B - \sin^2 B- \sin^2 C) = k^2 (\cos^2 B - \sin^2 C)$$

Les angles B *et* C étant complémentaires : $\cos B = \sin C \Rightarrow \cos^2 B = \sin^2 C$

d'où finalement:

$$\text{H} = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 (cqfd)$$

Etude de la réciproque

Soit un triangle ABC quelconque où l'on pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

et tel que $a^2 = b^2 + c^2$

deux cas de figure 1 et 2 voir page annexe

figure 1

Soit H la projection orthogonale de B

sur AC : d'où $a^2 = BH^2 + HC^2$

et on a : $BH^2 + HC^2 = b^2 + c^2$

$c^2 - BH^2 = HC^2 - b^2$

$$(c - BH)\underbrace{(c + BH)}_{\neq 0} = (HC - b)\underbrace{(HC + b)}_{\neq 0}$$

pour que cette égalité soit toujours vraie il suffit que

c - BH = 0 ou HC- b = 0 , l'une entraine l'autre

d'où : BH = c et HC = b $\Rightarrow$ H = A

ABC rectangle en A

Figure 2

oit H le pied de la hauteur abaissée du point A sur BC

on a :

$$c^2 = AH^2 + BH^2$$

$$b^2 = AH^2 + HC^2$$

$$b^2 + c^2 = 2\,AH^2 + BH^2 + HC^2$$

$$a^2 = 2\,AH^2 + (BH + HC)^2 - 2BH.HC$$

$$a^2 = 2AH^2 + a^2 - 2BH.HC$$

$$AH^2 = BH.HC$$

cette relation exprime que la hauteur est moyenne proportionnelle entre les projections de AB et AC sur BC , propriété caractéristique du triangle rectangle , suffit pour affirmer que le triangle ABC est rectangle en A .

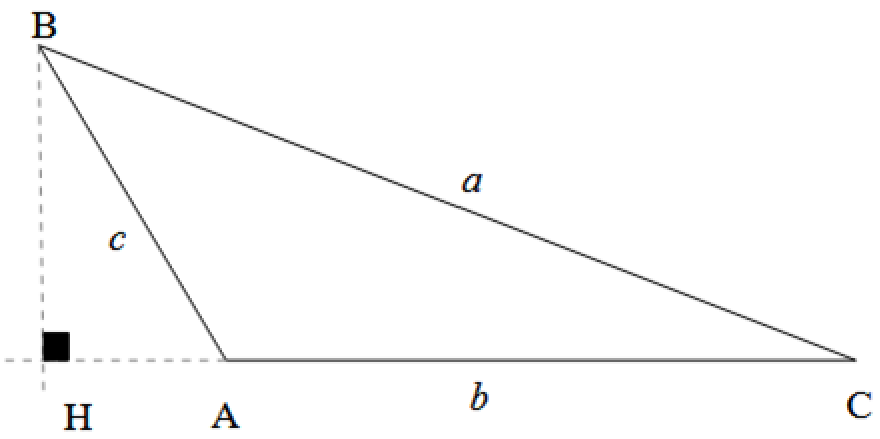

Fig 1

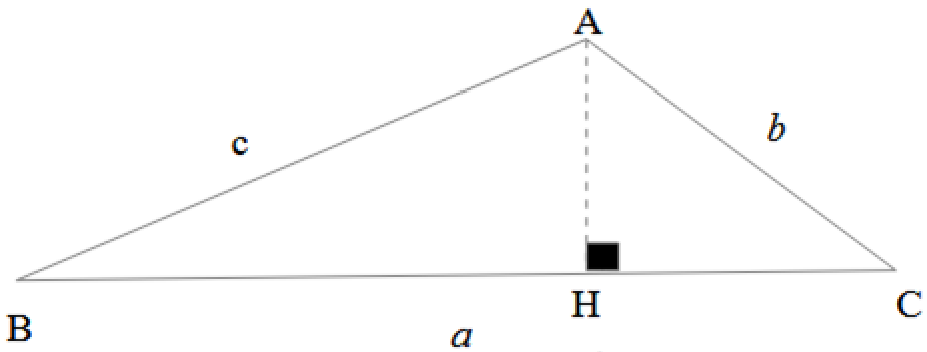

Fig 2

Retour [Loi des sinus]